**Algebra de los Circuitos Digitales.**

1847 - El británico George Boole desarrolló un nuevo tipo de álgebra (álgebra de Boole) e inició los estudios de lógica simbólica. En 1847 publicó “El análisis matemático del pensamiento” y en 1854 “Las leyes del pensamiento”.

Su álgebra era un método para resolver problemas de lógica por medio de los valores binarios (1 y 0) y tres operadores: and (y), or (o) y not (no). Por medio del álgebra binaria, El algebra estudia la relación entre números a través de operadores matemáticos. En el caso del caso del álgebra de Boole los elementos pueden tomar valores del sistema de numeración binario, y los operadores están dados por la operación binaria suma (+) y el producto binario (.).

Una forma de representación simbólica del álgebra de Boole, es a través de contactos, siendo estos dispositivos, elementos binarios, ya que pueden tomar dos estados, abierto y cerrado. Si relacionamos los estados de los contactos con el algebra de Boole tenemos:

Un contacto (llave) abierto es aquel que no permite la circulación de corriente, esto es equivalente a un cero.

posteriormente se desarrolló lo que hoy se conoce como código binario, que es el lenguaje utilizado por todas las computadoras.

## Introducción al Álgebra de Boole.



En cambio un contacto cerrado es equivalente a un uno permitiendo la circulación de corriente, puede entenderse como que cerrar una llave significa encender la luz, igual a un 1.



Por otro lado las operaciones binarias de suma y producto son equivalentes a:





## Postulados del Álgebra de Boole.

Tanto los elementos como los operadores binarios en el álgebra de Boole cumplen los siguientes postulados y propiedades.

|  |  |
| --- | --- |
| **Propiedad** | **En símbolos.** |
| **Conmutativa de la suma y del producto:**  Ambas son operaciones conmutativas, es decir si a y b son elementos del álgebra: |  |
| **Inversión**  Este postulado define una nueva operación fundamental que es la inversión o complementación de una variable. La variable binaria se encuentra siempre en el estado binario contrario al de a    El álgebra de Boole cumple con los postulados o propiedades enunciada, como cualquier otro conjunto que tenga 2 operaciones binarias y variables de 2 estados. |  |

## Teoremas del Algebra de Boole.

Con las propiedades anteriores se deducen los siguientes teoremas, que se demuestran mediante la llamada Tabla de Verdad. La Tabla de la Verdad de una expresión algebraica binaria, representa los calores que dicha expresión puede tomar para cada combinación de estados de las variables que forman parte de la misma.

Dos expresiones algebraicas que tienen la misma tabla de la verdad son equivalentes.

### 

TEOREMA N° 1 – DE LA DUALIDAD.

Cada identidad deducida de los postulados anteriores del álgebra de Boole pertenece válida si la operación (+) y (.) y los elementos 0 y 1 se intercambian entre sí.

### TEOREMA N°2 – DE LA IDEMPOTENCIA.

Para cada elemento “a” del Álgebra de Boole se verifica.





### TEOREMA N° 3 – IDENTIDAD DE LOS ELEMENTOS 0 Y 1.

Para cada elemento a de un Álgebra de Boole se verifica.



Aplicando la propiedad tenemos:



De este Teorema y de la Propiedad de Identidad se deduce.

|  |  |
| --- | --- |
| **0 + 0 = 0** | **0. 0 = 0** |
| **0 + 1 = 1** | **0. 1 = 0** |
| **1 + 0 = 1** | **1. 0 = 0** |
| **1 + 1 = 1** | **1. 1 = 1** |

Y por lo tanto las tablas de verdad de las operaciones binarias, suma y producto son:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** | **b** | **s** | **a** | **b** | **p** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **s = a + b** | | | **p = a + b** | | |

TEOREMA N° 4 – DE LA ABSORCIÓN.

Para cada par de elementos del Álgebra de Boole se verifica:



Donde:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **a** | **b** | **a + a. b** |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Algebraicamente sería.



Por otro lado en la tabla de la verdad se observa que la columna de “a + a.b” es igual “a”, lo que se demuestra en la igualdad.

### TEOREMA N°5 – DE ASOCIACIÓN.

En el álgebra de Boole las operaciones de suma y producto son asociativas.



Este teorema se demuestra por medio de la tabla de verdad.

TEOREMA N° 6 – DE COMPLEMENTO DE 0 Y 1.

El estado de las variables binarias, 0 y 1, son complementarias Álgebra de Boole, es decir.



TEOREMA N°7 – DE LA DOBLE NEGACIÓN.



Su demostración se realiza por medio de la tabla de verdad.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| **0** | **1** | **0** |
| **1** | **0** | **1** |

TEOREMA N° 8 – DISTRIBUCIÓN DE LA NEGACIÓN – LEYES DE MORGAN.

En este teorema se postula que:

La negación de un producto es igual a la suma de las variables negadas.



La negación de una suma es igual al producto de las variables negadas.



Estas son las denominadas Leyes de Morgan, si además realizamos la demostración para dos variables tenemos:

De acuerdo al postulado se dice:

**“La negación de una suma es igual al producto de los sumandos negados.”**

 

Aplicando las propiedades tenemos:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Generalizando a un número cualquiera de variables.

Denominamos a b + c + d +……. = p y aplicamos la Ley de Morgan.



Llamando a q = c + d…. resulta que:



*En la práctica este teorema demuestra que un circuito paralelo (de variables 0 y 1) cuya salida negada es equivalente al circuito serie de las variables 0 y 1 negadas.*

En este teorema se definen dos nuevas funciones lógicas de gran importancia que se utilizaran para la realización de los sistemas digitales.

Estas funciones se denominan NO-O (NOR) y NO-Y (NAND)

Las operaciones lógicas de suma de producto e inversión pueden ser realizadas mediante estas dos funciones.





Inversión: Se realiza con la función NO-O y NO-Y de una sola entrada.

## Tabla de Propiedades y Teoremas del Álgebra de Boole.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PROPIEDADES** | | **SUMA** | **PRODUCTO** |
| 1 | Conmutativa. | a + b = b + a | a . b = b . a |
| 2 | Identidad | 0 + a = a | 1 . a = a |
| 3 | Distributiva | a . (b + c) = a . b + a . c | a + (b . c) = (a + b) . (a . c) |
| 4 | Inversión |  |  |
| **TEOREMAS** | |  |  |
| 1 | Dualidad | Se puede pasar de una propiedad a otra cambiando los operandos (+) y (.) y los elementos (0) y (1). | |
| 2 | Idempotencia | a + a = a | a . a = a |
| 3 | Identidad de elem. 0 y 1 | a + 1 = 1 | a . a = 0 |
| 4 | Absorción | a + (a.b) = a | a . (a + b) = a |
| 5 | Asociativa. | a +(b + c) = (a + b) + c | a . (b . c) = (a . b) . c |
| 6 | Complemento de 0 y 1 |  |  |
| 7 | Involución. |  |  |
| 8 | Leyes de Morgan |  |  |
| 9 | Sin Nombre |  |  |